CÓNICAS

Introducción:

Es difícil encontrar en la historia de las matemáticas objetos que hayan llamado tanto la atención del ser humano como las curvas planas identificadas como secciones cónicas o cónicas, como suelen llamarse.

Aunque hoy estamos rodeados de escenarios y objetos que pueden verse como representación modélica de tales curvas, su aparición obedeció a la capacidad de abstracción de la mente humana apurada por resolver un problema ambiental de la época.

Cuenta la historia que la peste mató a la cuarta parte de la población de Atenas y esta catástrofe dio origen a uno de los tres problemas clásicos de la geometría griega, el problema de la duplicación del cubo o problema de Delos. A grandes rasgos, para terminar con la peste el oráculo pidió que se duplicara el altar cúbico dedicado a Apolo.

Fue Menecmo (hacia el 350 A.C) el primero que, ocupándose del problema de la duplicación del cubo descubre las secciones cónicas y sus propiedades. Pero fue el matemático griego Apolonio (262-190 A.C.) de Perga el primero en estudiar detalladamente las curvas cónicas y encontrar la propiedad plana que las define.

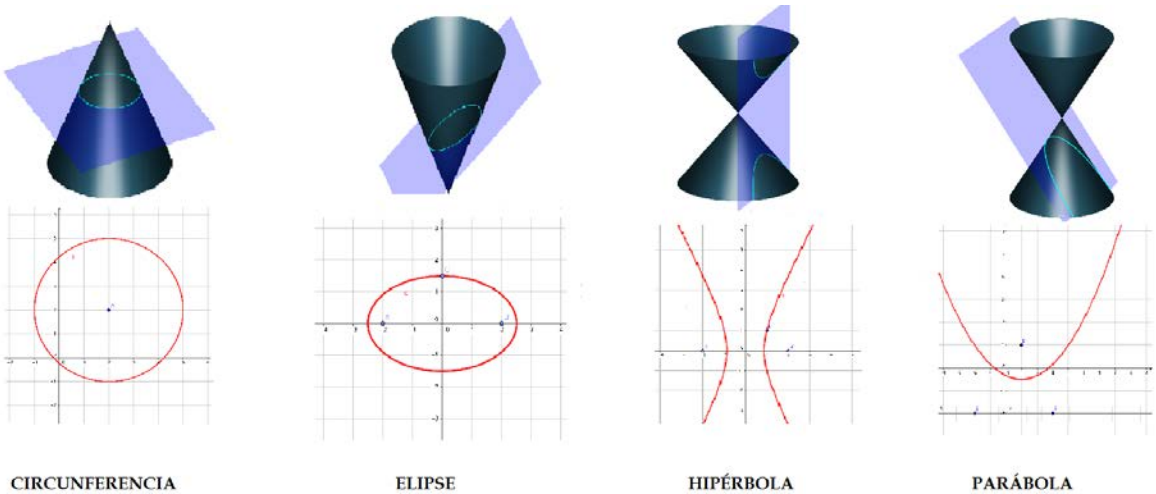
Son muy amplias y abundantes las aplicaciones que tienen las cónicas en la vida humana. Intervienen en las matemáticas, física, astronomía, arquitectura, medicina, ingeniería y biología por citar algunas. De ahí la importancia de conocerlas, poder reconocerlas y graficarlas.

Este apunte no es un estudio detallado de estas curvas, simplemente pretende ser una guía para que el alumno pueda reconocer y graficar las mismas.

Definición de cónica

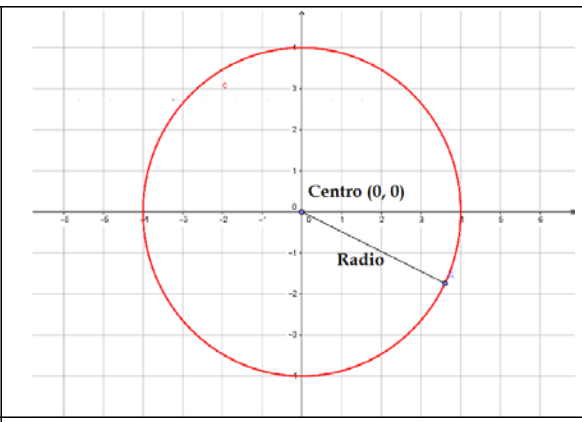
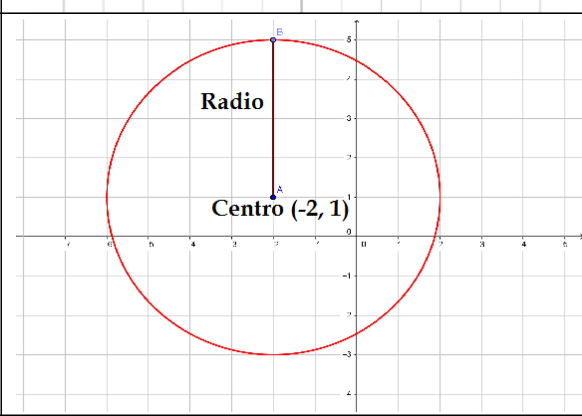
Se denomina cónica o sección cónica al conjunto de los puntos que forman la intersección de un plano con un cono de revolución de dos ramas. Si el plano es perpendicular al eje del cono, la intersección es una circunferencia o punto, según que corte a una rama o pasa por el vértice. Si el plano no es perpendicular al eje, pero corta a toda generatriz, la intersección es una elipse. Si plano es paralelo a una generatriz y corta a todas las demás, la intersección es una parábola. Si el plano corta a dos ramas del cono y no pasa nada por el vértice, la intersección es una hipérbola.

Analizaremos cada una de ellas y sus diferentes gráficas por separado, pero antes veamos como son los cortes con los planos y según su inclinación las distintas curvas planas que generan.



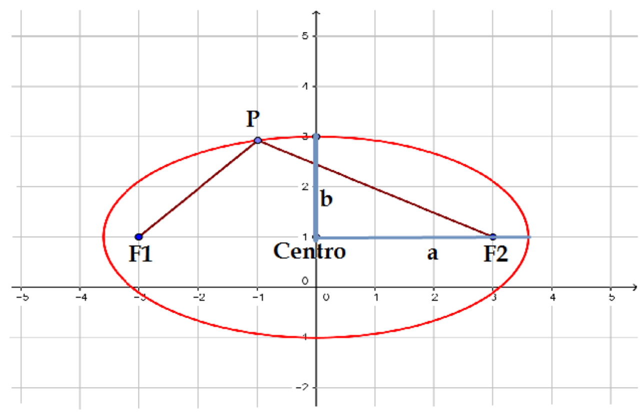
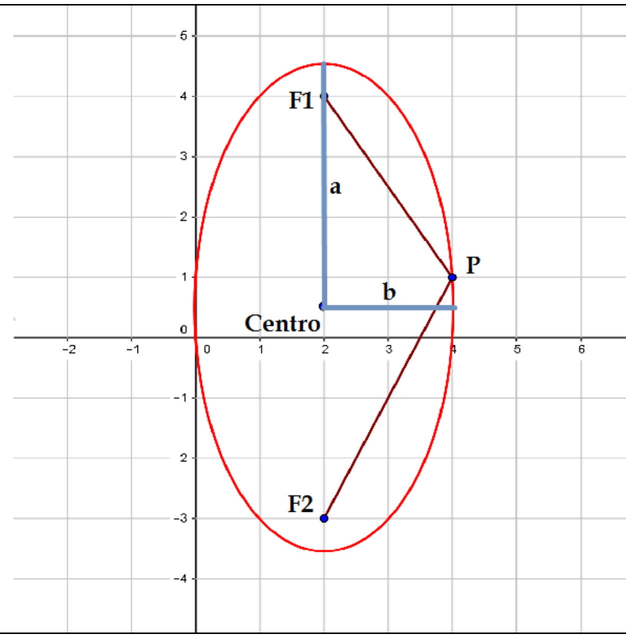
Circunferencia

Se llama circunferencia al lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado ***centro***. El ***radio*** de la circunferencia es la distancia de un punto cualquiera de dicha circunferencia al centro.

La ecuación de la circunferencia centrada en el origen de coordenadas y con un radio r es: $x^2 + y^2 = r^2$	
La ecuación de la circunferencia con centro en el punto A = (x_0, y_0) y con un radio r es: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$	

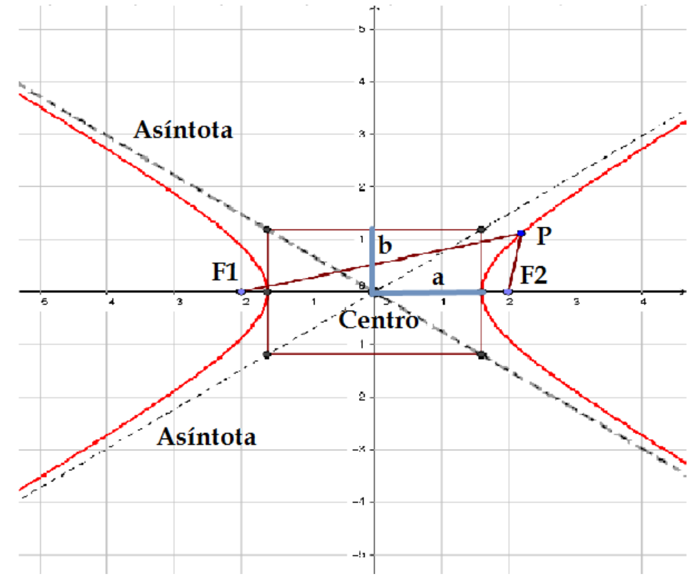
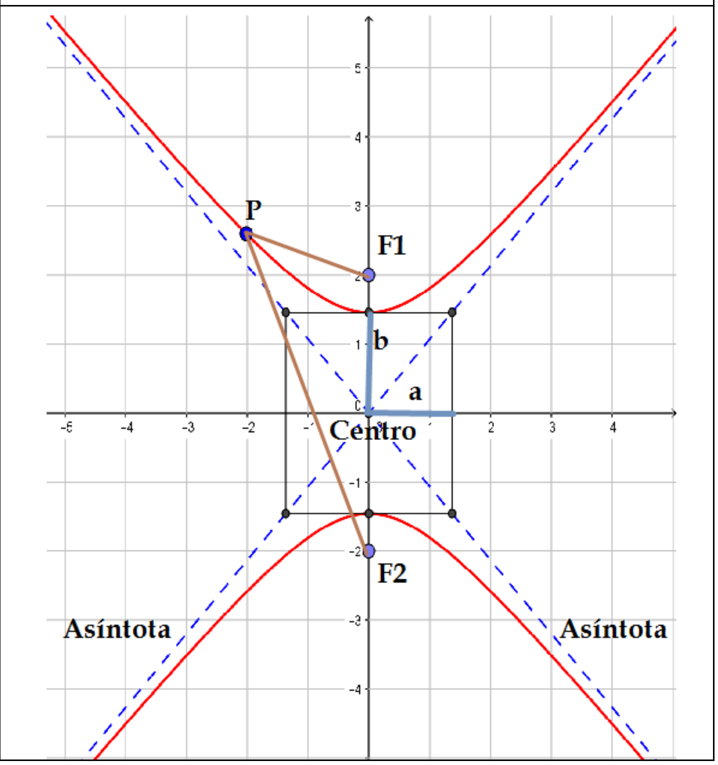
Elipse

La elipse es el lugar geométrico de los puntos (P) del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante (2a). Estos dos puntos fijos se llaman ***focos*** de la elipse (F1 y F2) y la distancia entre los focos es menor que 2a. En la figura queda claro quién es a.

La ecuación de la elipse con centro en el punto A = (x_0 , y_0) y con los focos sobre una recta paralela al eje X es: $$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$ En el caso que el centro sea el origen de coordenadas, la ecuación de la elipse es: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$	
En el caso que los focos estén situados sobre una recta paralela al eje y, la ecuación de la elipse será: $$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$$ Siempre el valor de a es mayor que el de b. Nuevamente si el centro es el origen de coordenadas la ecuación será: $$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$	

Hipérbola

Es el lugar geométrico de los puntos (P) del plano cuya diferencia de distancias entre dos puntos fijos es constante. Estos dos puntos fijos se llaman ***focos*** de la hipérbola (F1 y F2). Con 2a se denomina al valor absoluto de la diferencia de las distancias a los focos. En la ecuación de la hipérbola, los valores a y b no son intercambiables como en el caso de la elipse, el valor a siempre aparece en el término de la x, mientras que b lo hace en el de la y.

La ecuación de la hipérbola con centro en el punto A = (x_0 , y_0) es: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ Nuevamente si la hipérbola está centrada en el origen de coordenadas La ecuación será: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ Observar que si el término en y es negativo el gráfico es el mostrado en la figura. Para construirla a partir de la ecuación, se forma un rectángulo de lados 2a por 2b con centro en el centro de la hipérbola y sus diagonales son las asíntotas.	
Cuando el eje principal (el eje de los focos) es paralelo al eje Y, la gráfica es la mostrada en la figura y la ecuación de la hipérbola es: $-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ Y su está centrada en el origen, su ecuación es: $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	

Parábola

La parábola es el lugar geométrico de todos los puntos (A) del plano que equidistan de un punto llamado ***foco*** (F) y una recta (d) llamada ***directriz***. Se llama p a la distancia que hay entre el foco y la directriz.

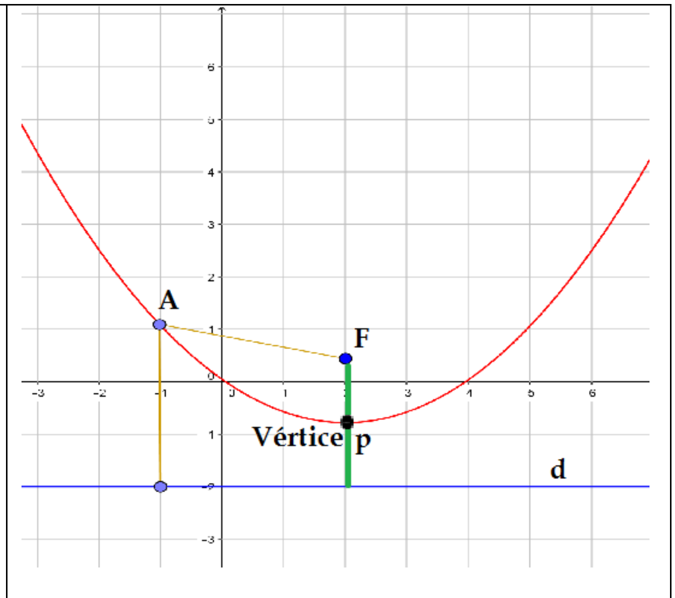
La ecuación general de la parábola con vértice en el punto (x_0 , y_0) y cuando la directriz es paralela al eje X es:

$$(x-x_0)^2 = \pm 2p(y-y_0)$$

Y en el caso que el vértice esté en el origen del sistema de coordenadas, la ecuación se simplifica a:

$$x^2 = \pm 2py$$

Si consideramos el signo + la parábola apunta hacia arriba como en la figura, si usamos el signo -, la parábola apuntará hacia abajo.



Si la directriz d es paralela al eje Y, la parábola tendrá la siguiente ecuación, suponiendo que el vértice se encuentra en el punto (x_0 , y_0)

$$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$$

Y si el vértice coincide con el con el origen de coordenadas la ecuación será:

$$y^2 = 2px$$

De nuevo, al despejar la variable Y, la raíz cuadrada del segundo miembro tiene dos signos, si utilizamos el + la parábola irá hacia la derecha como muestra el gráfico, si consideramos el signo -, la misma apuntará hacia a la izquierda.